Performances des systèmes linéaires asservis

I Précision d'un système asservi

1°) Erreur statique ou erreur de position.

a) définition.

Soit un système bouclé de fonction de transfert en BO : $G(p)$ et en BF : $H(p)$
On appelle erreur statique (ou erreur en position) du système en BF, le paramètre ε_p défini par : $\varepsilon_p = \lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t)$ lorsque $e(t) = 1$

En invoquant, le théorème de la valeur finale, on a :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\left[E(p) - S(p)\right] = \lim p\left[E(p) - H(p)E(p)\right]$$

$$E(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow \varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left[1 - H(p)\right]$$

Plus ε_p est faible, meilleur est la précision du système.

b) Erreur de position d'un système de gain statique K en BO

$\varepsilon_p = \dfrac{1}{1+K}$ avec $G(p) = \dfrac{K}{1 + a_1 p + \dots + a_n p^n}$ en BO gain statique K

$$\Rightarrow H(p) = \frac{K}{1 + K + a_1 p + \dots + a_n p^n}$$

> L'erreur de position en BF d'un système possédant un gain statique K en BO est : $\varepsilon_p = \dfrac{1}{K+1}$

Rm : (1) Bonne précision qd $K \nearrow$
(2) Bonne stabilité $\rightarrow$ gain statique en BO $\searrow$
$\Rightarrow$ difficile de concilier les 2

c) erreur de position d'un système comportant un ou plusieurs pôles nuls.

Notre système possède une FT en BO : $G(p)$ placée dans une boucle à retour unitaire

$$G(p) = \frac{K}{p^{\alpha}(1 + a_1 p + \cdots + a_m p^n)} \qquad \alpha > 0$$

en BF : $$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{K + p^{\alpha}(1 + a_1 p + \cdots + a_n p^n)}$$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left[1 - \frac{K}{K + p^{\alpha}(1 + \cdots + a_n p^n)} \right] = 1 - \frac{K}{K} = 0$$

L'erreur en position en BF d'un système dont la FT en BO comporte au moins un pôle nul (intégrateur) est nulle.

2°) Erreur de vitesse ou erreur de traînage.

a) Définition.

Soit un système bouclé de FT $G(p)$ en BO et $H(p)$ en BF.

L'erreur de vitesse du système en BF est :

$$\varepsilon_v = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) \qquad \text{lorsque } e(t) = t \text{ (rampe)}$$

En utilisant le théorème de la valeur finale, on a :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\left[E(p) - S(p)\right] = \lim_{p \to 0} p\left[E(p) - H(p)E(p)\right]$$

$$= \lim_{p \to 0} p\left[\frac{1}{p^2} - \frac{H(p)}{p^2}\right] = \lim_{p \to 0}\left[\frac{1 - H(p)}{p}\right]$$

ε_v ~~permet de~~ montre l'aptitude du système à fournir une réponse qui suit le plus précisément possible une consigne qui varie dans le temps.

b) erreur de vitesse d'un système de gain statique K en BO

$$G(p) = \frac{K}{1+a_1p+\cdots+a_np^n} \quad \text{en BO}$$

en BF $$H(p) = \frac{K}{1+K+a_1p+\cdots+a_np^n}$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0} \frac{1-H(p)}{p} = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p}\left[1 - \frac{K}{1+K+a_1p+\cdots+a_np^n}\right]$$

$$\boxed{\varepsilon_v \to +\infty}$$

L'erreur de vitesse en BF d'un système possédant un gain K en BO est infinie.

c) erreur de vitesse d'un système comportant un ou plusieurs pôles nuls.

en BO : $$G(p) = \frac{K}{p^\alpha(1+\cdots+a_np^n)} \quad \text{avec } \alpha > 0$$

en BF : $$H(p) = \frac{K}{K+p^\alpha(1+\cdots+a_np^n)}$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha-1}}{K+p^\alpha}$$

si $\alpha = 1$ on a $\varepsilon_v = \frac{1}{K}$

si $\alpha > 1$ on a $\varepsilon_v = \lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha-1}}{K+p^\alpha} = 0$

Rm : (1) qd la FT en BO possède au moins un pôle nul double (2 intégrateurs) alors $\varepsilon_v = 0$

(II) Temps de montée d'un système du 2nd ordre ou un fonctionnement analogue à un 2nd ordre.

$$t_m \simeq \frac{3}{\omega_{c0}}$$

t_m est le temps de montée en BF et ω_{c0} est la pulsation de coupure à 0 dB du système en BO.

On peut estimer la valeur du temps de montée en BF à partir d'une caractéristique fréquentielle du système en BO.

Rm : (1) Ce n'est qu'une estimation

(2) cette expression est vraie pour $K \gg 1$ et $\xi_{BF} \simeq 0,65$

(3) ordre de grandeur suffisant pour évaluer la rapidité du système.

(III) Limitation du dépassement.

1°) Dépassement pour un système du 2nd ordre.

Pour un système du 2nd ordre de FT en BO $G(p)$ tq : $G(p) = \dfrac{K}{\dfrac{p^2}{\omega_n^2} + \dfrac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$

La valeur du dépassement en BF où $\xi_{BF} < 1$ est :

$$d\% = 100 \times e^{-\frac{\pi \xi_{BF}}{\sqrt{1-\xi_{BF}^2}}}$$

2°) Relation entre la marge de phase et le dépassement en BF pour un système 2nd ordre ou un fct analogue.

Le facteur d'amortissement en BF est du même ordre de grandeur que la marge de phase exprimée en degré et divisée par 100 :

$$\xi_{BF} \approx \frac{\Delta \varphi^\circ}{100}$$

$\Rightarrow$ le dépassement en BF est fonction de la valeur de marge de phase (FT en BO)

V Influence du gain statique en BO sur les performances en BF.

Soit un système de FT en BO caractérisé par $G(p) = \frac{K}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + 1}$ de gain statique K.

(1) si K ↗ alors la marge de phase est réduite donc diminue la stabilité du système

(2) on sait que $\xi_{BF} = \frac{\Delta\varphi°}{100}$

(*) si K ↗ alors ξ_{BF} ↘ en BF donc D% ↗

(**) si K ↘ alors ξ_{BF} ↗ (car la marge $\Delta\varphi°$ ↗) donc on limite le dépassement en BF D% ↘.

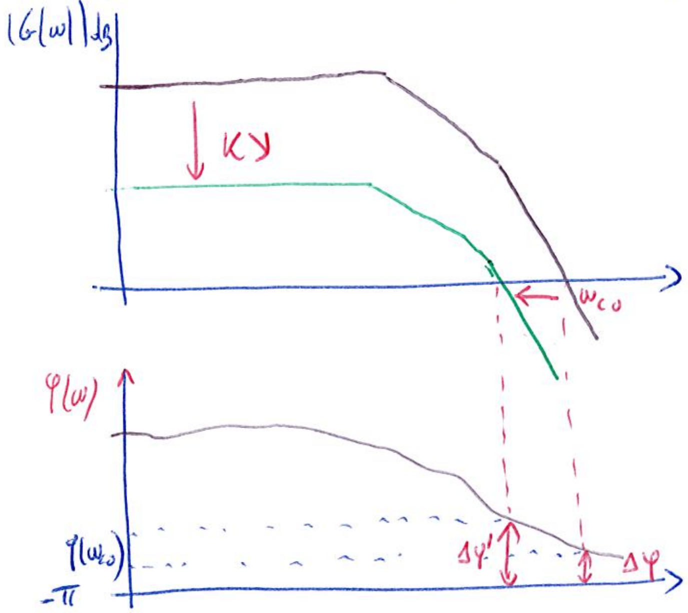
Ces 2 performances sont liées et évoluent dans le même sens lorsqu'on réduit le gain.

(3) Agir sur le gain statique K en BO influence la rapidité et la précision du système en BF

(*) une bonne précision → K ↗

(*) K ↘ → rend le système moins précis en BF.

L'influence du gain statique sur la rapidité du système ?



Rm: Si K ↘, le diagramme de Bode du gain se décale vers le bas et la phase ne change pas.

$\boxed{\Rightarrow \text{Diminution de la pulsation de coupure à 0 dB } (\omega_{c0})}$

Si ω_{c0} diminue, alors t_m ↗ car $t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$

$\boxed{\text{Le système devient plus lent.}}$