

## 6<sup>e</sup> leçon: Analyse de systèmes.

### I) Intro.

Le but de l'automatisme est que le système qu'on lui confie fonctionne seul et correctement.

Cela signifie  $\rightarrow$  par rapport à ce qu'attend l'utilisateur

L'automatisme attend de l'utilisateur d'un système qu'il lui fournisse un certain des charges. Une cahier de charges est une liste de spécifications et chacune est un objectif à atteindre.

Le système de commande que doit mettre en service l'automatisme (régulateur ou correcteur) devra satisfaire des spécifications de:

- précision
- rapidité
- stabilité
- rejet de perturbation
- insensibilisation vis à vis de variations paramétriques.

### II) Définitions des objectifs.

#### a) Précision.

- On quantifie la précision en comparant le signal de sortie au signal d'entrée. Le signal résultant  $\varepsilon(t)$  représente la différence entre la consigne (objectif souhaité) et la mesure (résultat).
- La précision sera d'autant meilleure que  $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$  (l'objectif atteint)
- Si on observe  $\varepsilon(t)$  sur un intervalle fini, on parlera de précision dynamique (l'erreur dépend du temps)
- Si on observe  $\varepsilon(t)$  au bout d'un temps suffisamment long pour que le système se trouve en régime permanent, on parlera de précision statique ou encore d'erreur statique.
- $\varepsilon(t) = d(t) - e(t)$
- si l'entrée est un échelon, on parlera  $\varepsilon(t)$  erreur en position
- $\text{---}$  un rampe,  $\text{---}$  erreur en vitesse ou traînage.
- $\text{---}$  une parabole,  $\text{---}$  en accélération.

#### b) Rapidité.

On peut juger la rapidité d'un système en mesurant sur sa réponse indicielle, soit le temps de réponse à 5% ou 2%, soit le tps de montée ou encore  $T_m$  (1<sup>er</sup> dépassement)

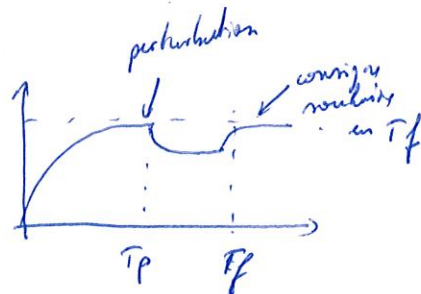
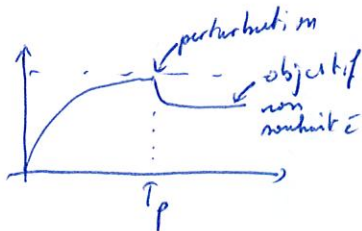
## c) Rejet de perturbation

Une perturbation est un signal parasite qui vient modifier le comportement du système et que l'on traite comme une entrée supplémentaire. Rejeter une perturbation : c'est de faire en sorte qu'elle n'affecte pas le fonctionnement du système.

Ex



(a) le système rejoint la consigne imposée



La perturbation a été rejetée en Tf

## III) Niveau de Boucheye

Comment doit-on s'y prendre pour atteindre ces objectifs?

Si le système ne peut pas à lui seul satisfaire ces contraintes, on cherche lui associer un autre système:

→ un régulateur ou un correcteur.

On a 2 types de fonctionnement:

• en Boucle ouverte (BO):  $\rightarrow [K(p)] \rightarrow [G(p)] \rightarrow s(t)$

• en Boucle Fermée (BF):  $\oplus \rightarrow [K(p)] \rightarrow [G(p)] \rightarrow s(t) \rightarrow \ominus$

$G(p)$  représente le fonction de transfert du système à régler.

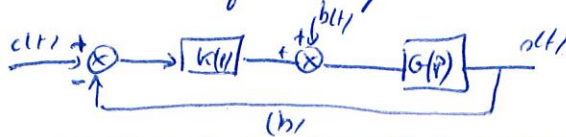
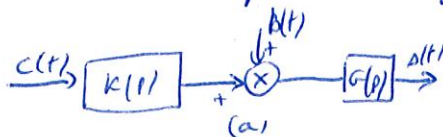
$K(p)$  \_\_\_\_\_ du régulateur.

L'objectif ici, est de trouver  $K(p)$  de sorte que la sortie  $s(t)$  se comporte correctement vis à vis des stimuli (échelon, rampe, sinus) injectés au niveau de la consigne  $c(t)$ .

→ Notre but est de montrer que le bouclage est indispensable vis à vis de certains objectifs comme le rejet de perturbation que nous allons détailler.

### a) Rejet de perturbation

Comment se comporte les configurations BO et BF en face des perturbations?



Calculons la sortie vis à vis de l'entrée.

(3)

$$a) S(p) = G(p) B(p) + G(p) K(p) C(p)$$

$$b) [-S(p) + C(p)] K(p) + B(p) G(p) = S(p)$$

$$S(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)K(p)} B(p) + \frac{G(p)K(p)}{1 + G(p)K(p)} C(p)$$

On cherche à quantifier l'influence de  $b(t)$  sur  $s(t)$ .

On peut appliquer le principe de superposition car système linéaire :

$$x(t) = x_b(t) + x_c(t) \quad x_b(t) \text{ est la réponse du système à } b(t) \text{ qd } c(t) = 0$$

$$(a) S(p) = G(p) B(p) \Rightarrow K(p) \text{ n'a pas d'influence pour agir sur la perturbation}$$

$$(b) S(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)K(p)} B(p) \Rightarrow \text{en BF, on peut réduire l'influence de } B(p) \text{ sur } S(p).$$

Il faut que  $G(p)K(p)$  soit prépondérant devant 1.

$$\text{Dans ce cas } S(p) = \frac{G(p)}{G(p)K(p)} B(p) \approx \frac{B(p)}{K(p)}$$

si  $K(p) \gg 1$ , on atténue l'action de  $B(p)$  sur  $S(p)$  donc de la perturbation  $b(t)$  sur  $s(t)$

On aura alors pour la sortie globale :

$$S(p) = \frac{B(p)}{K(p)} + \frac{G(p)K(p)}{G(p)K(p)} C(p) \approx \frac{B(p)}{K(p)} + C(p)$$

$S(p)$  tend vers  $C(p)$  si l'influence de  $\frac{B(p)}{K(p)}$  est réduite par  $K(p)$  donc  $s(t)$  ne finit pas à suivre la consigne  $c(t)$  malgré la présence de la perturbation.

Le bouclage permet de faire du rejet de perturbation : impossible en BO.

### c) Stabilisation d'un système

Il existe des systèmes qui sont instables par nature. Dans ce cas, le bouclage de l'ensemble régulateur + système permet d'avoir un système global stable si le correcteur a été calculé correctement.

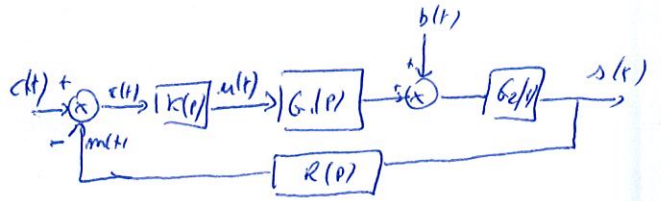
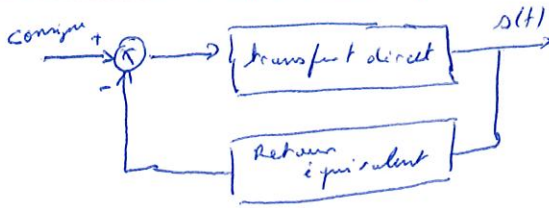
### d) Amélioration des performances

Il est possible d'améliorer les perf d'un système en lui adjoignant un correcteur (p la rapidité). L'action sera meilleure s'il est associé dans une boucle fermée.

- La structure BF permet :
- stabiliser un système instable
  - améliorer la prof d'un système
  - faire du réglage de performance.
  - déstabiliser un système vis à vis des variations paramétriques.

(4)

IV) Structure d'une boucle fermée - Définition.



$c(t)$  = entrée ou consigne du système.

$s(t)$  = sortie du système.

$b(t)$  = perturbation

$G(p) = G_1(p) \times G_2(p)$  = le système à commander.

$G_1$  et  $R(p)$  sont respectivement le comportement des actionneurs et les capteurs.

$G_2(p)$  = système dynamique = fait de transfert des équations différentielles qui décrivent le comportement du système vis à vis des lois physiques.

$K(p)$  représente le correcteur que l'automaticien doit mettre en oeuvre pour le fonctionnement.

Le correcteur a pour entrée  $e(t) = c(t) - m(t)$  (signal d'erreur entre la consigne à suivre et la mesure <sub>m(t)</sub>).

Et de lier la sortie  $u(t)$  que l'on appelle la commande du système  $G(p)$ .

on définit:

(1) La FTBO en BO est:

$$FTBO(p) = K(p) G_1(p) G_2(p) R(p) = K(p) G(p) R(p)$$

- ⇒ on coupe de tous les blocs et on coupe la boucle au niveau de  $m(t)$  (on dit ouvrir la boucle)
- ⇒ la FTBO est le produit de toutes les transmittances présentes.

(2)  $FTBF(p) = \frac{\text{Fonction de transfert de la chaîne direct}}{1 + FTBO(p)}$

$$= \frac{G(p) K(p)}{1 + G(p) K(p) R(p)}$$

V) Stabilité

La première contrainte à tenir pour un système automatique est la stabilité. Un système est stable en EB/BB si la réponse à une entrée de type bornée est elle-même bornée.

a) Domaine temporel.

La stabilité EB/BB d'un système linéaire, continu, invariant est garantie si sa réponse impulsionnelle est absolument sommable. Le système sera stable en EB/BB si:

$$\int_0^{t-\infty} |h(t)| dt \leq L < \infty$$

b) Domaine fréquentiel.

La stabilité EB/BB d'un système linéaire, continu, invariant est garantie si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative

$$H(p) = \frac{N(p)}{\prod (p-p_i)^{n_i}} \text{ sera stable si } \operatorname{Re}(p_i) < 0 \quad \forall i$$

Rem: des pôles sur l'axe imaginaire ne caractérisent pas une instabilité au sens où on l'entend.

(1) Pôles complexes conjugués  $p = \pm j\omega$      $\odot$   $H(p) = \frac{1}{p^2+1}$      $p = \pm j$      $h(t) = \sin(t)$

L'application d'un échelon à l'entrée d'un système de ce type génère une sortie présentant des oscillations entretenues (non amorties) à la pulsation  $\omega$ .

→ le système est en limite de stabilité.

(2) Pôles à l'origine  $p=0$

La sortie présente une divergence polynomiale et non un signal divergeant exponentiellement.

c) Exemples.

•  $H(p) = \frac{5}{(p+1)(p+2)}$     1 zero  $p = 3$  et 2 pôles réels et simples  $p = -1$  et  $p = -2$   
→ le système est stable.

•  $H(p) = \frac{2}{(p-1)^2(p^2+p+1)}$     1 pôle réel double  $p = 1$  → système instable.

•  $H(p) = \frac{9}{p^2+9}$     → 2 pôles complexes conjugués en  $p = \pm 3j$ .  
→ le système est stable en sens EB/BB mais il présente des oscillations entretenues à la pulsation  $\omega = 3 \text{ rad/s}$ .

e) Critères de stabilité

1) Critère de Routh.

$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$  dans laquelle  $N(p)$  et  $D(p)$  sont des polynômes en  $p$  à coeff constants = Syst. linéaire.

$D(p) = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0$

à partir de ces coeff, on forme les 2 premières lignes du tableau de Routh.

N° ligne	Tableau					
1	$a_m$	$a_{m-2}$	$a_{m-4}$	$a_{m-6}$	...	0
2	$a_{m-1}$	$a_{m-3}$	$a_{m-5}$	...	...	0
3	$c_m$	$c_{m-1}$	$c_{m-2}$	...	...	0
4	$d_m$	$d_{m-1}$	$d_{m-2}$	...	...	0
5	$e_m$	$e_{m-1}$	$e_{m-2}$	...	...	0
...						
$m-2$	$r_m$	$r_{m-1}$	0			
$m-1$	$s_m$	$s_{m-1}$	0			
$m$	$t_m$	0	0			
$m+1$	$u_m$	0	0			
$m+2$	0	0	0			

Chaque nouvelle ligne du tableau est obtenue à partir des 2 lignes immédiatement précédentes:

$$c_{m-i} = \frac{[a_{(m-1)} a_{(m-2i-2)}] - [a_{(m)} a_{(m-2i-3)}]}{a_{m-1}}$$

$$d_{m-i} = \frac{c_m a_{(m-2i-3)} - a_{m-1} c_{(m-i-1)}}{c_m}$$

$$e_{m-i} = \frac{d_m c_{m-i-1} - d_{m-i-1} c_m}{d_m}$$

m méthode pour  $r_m, s_m, t_m, u_m \dots$

Une fois, ce tableau dressé, il reste à examiner les signes des coeff de la colonne de gauche (7)

Le critère de Routh:

Les racines de l'équation caractéristique sont toutes à partie réelle str:  $\Rightarrow$  sont négative si tous les éléments de la 1<sup>re</sup> colonne du tableau de Routh sont de m<sup>me</sup> signe.

Par ailleurs, le nombre de changements de signe dans la ~~tableau~~ colonne de gauche indique le nombre de racines  $\Re(p)$  situées dans le 1/2 plan droit.

Rem: Le critère de Routh décrit est possible dans les cas dit régulier.

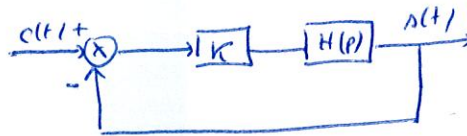
Dans certains cas, le tableau ne peut pas être dressé:

(1) le 1<sup>er</sup> ~~élément~~ élément d'une ligne vaut 0.

(2) tous les éléments d'une ligne sont nuls alors qu'on n'est pas encore à la fin.

Exercice:

$$H(p) = \frac{1}{(p^2)(p+4)(p+10)}$$



(\*1)  $k=1$  étudions la stabilité de la BO et formé:

$$FTBO(p) = \frac{K}{(p^2)(p+4)(p+10)} = \frac{1}{p^3 + 16p^2 + 68p + 80}$$

n<sup>o</sup> ligne

Tableau

1	1	68	0
2	16	80	0
3	68	0	0
4	80	0	0
5	0	0	0

Tous les coeff de la 1<sup>re</sup> colonne sont positif donc de m<sup>me</sup> signes

$\Rightarrow$  le système est stable.

$$FTBF(p) = \frac{KH(p)}{1+KH(p)} = \frac{H(p)}{1+H(p)} = \frac{1}{p^3 + 16p^2 + 68p + 80} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{p^3 + \dots}\right)}$$

$$= \frac{1}{p^3 + 16p^2 + 68p + 80}$$

Tableau de Routh

1	1	68	0	4	80	0	0
2	16	80	0	5	0	0	0
3	$\frac{1007}{16}$	0	0				

Système stable

$\Leftarrow$

3<sup>e</sup> cas :  $K$  est inconnue

(8)

$$FTBF(p) = \frac{K}{p^3 + 16p^2 + 64p + (80+K)}$$

1	1	64	0
2	16	80+K	0
3	$\frac{1008-K}{10}$	0	0
4	80+K	0	0
5	0	0	0

Pour que tous les coeff de la 1<sup>re</sup> colonne soit de m<sup>me</sup> signe il faut :

$$\begin{cases} \frac{1008-K}{10} > 0 \\ 80+K > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K < 1008 \\ K > -80 \end{cases}$$

Par hyp :  $K > 0$  nous en déduisons pour que le système soit stable

$$0 < K < 1008$$



## i) Critère de Nyquist.

(5)

Le critère de Nyquist est un critère graphique de stabilité en BF obtenue à partir du lieu de Nyquist du système en BO.

Il est une conséquence du théorème de Cauchy appliquée à la fonction de transfert d'un système asservi.

## a) Théorème de Cauchy

Soit une fonction complexe d'une variable complexe  $F(p)$  possédant  $n$  pôles et  $m$  zéros. On considère, dans le plan complexe, un contour fermé  $\Gamma$  de telle sorte que tous les pôles et tous les zéros de la fonction de transfert  $F(p)$  se trouvent à l'intérieur de ce contour. Lorsque  $p$  se déplace le long du contour  $\Gamma$ , son image par  $F$  se déplace le long d'une courbe que nous appelons  $F(\Gamma)$ .

Le nombre de tours effectués par  $F(\Gamma)$  autour de l'origine est égal à  $m-n$ . La différence  $m-n$  est comptée positivement si le sens de rotation de  $p$  le long de  $\Gamma$  coïncide avec le sens de rotation de  $F(p)$  autour de  $O$  et négativement dans le cas contraire.

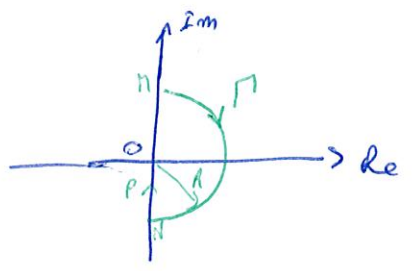
## b) Contour de Nyquist.

On définit le contour de Nyquist par la courbe  $\Gamma$  définie par le demi-circulaire d'un cercle de rayon  $R$  et de centre  $O$  lorsque  $R \rightarrow \infty$ , du côté des parties réelles.

Ce contour est formé de:

- (1) l'axe imaginaire  $p = j\omega$  pour  $\omega \in ]-\infty; +\infty[$
- (2) Un rayon  $R$  avec  $R \rightarrow +\infty$

On l'oriente arbitrairement dans le sens horaire. Cela signifie que l'on suppose, dans l'application du théorème de Cauchy, que  $p$  décrit le contour  $\Gamma$  dans le sens indiqué sur la figure.



$\Gamma$  contient donc tout le demi-plan correspondant aux parties réelles positives.

c) application du théorème de Cauchy à l'étude de la stabilité.

Th de Nyquist.

(1) Un système est stable en BF si l'image du contour de Nyquist par la fonction  $F(p) = 1 + G(p)$  fait autour de l'origine, dans le sens horaire, un nbr de tours égal à  $-n$  (où  $n$  est le nombre de pôles à partie réelle positive de la FT en BO  $G(p)$ ).  
2<sup>o</sup> l'image du contour de Nyquist ne doit pas passer par l'origine.

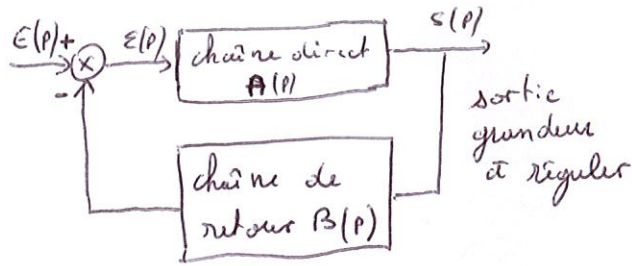
2<sup>o</sup> étude de la position de l'image de  $\Gamma$  par  $F = 1 + G$  par rapport au point 0 est équivalente à l'étude de la position de son image par  $G$  par rapport au point  $(-1, 0)$  que l'on nomme C (point critique).

On a donc un nouveau énoncé du critère de Nyquist.

(2) Un système est stable en BF si l'image du contour de Nyquist par la fonction  $G(p)$  fait autour de C, dans le sens horaire, un nombre de tours égal à  $-n$  (où  $n$  est le nombre de pôles à partie réelle positive de la fonction de transfert en BO  $G(p)$ ).

2<sup>o</sup> l'image du contour de Nyquist ne doit pas passer par le point critique C.

Considérons le système suivant :



Le système est stable en BF ssi sa fonction de transfert en BF

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \quad \text{ne possède aucun pôle à partie réelle positive.}$$

→ l'étude de la stabilité du système revient à étudier les solutions de l'équation :  $1 + A(p)B(p) = 0$  ou  $1 + G(p) = 0$

\*  $G(p)$  étant la FT en BO du système  $\Rightarrow$  l'étude la stabilité du système en BF est réalisée à partir de la FT en BO.

\* Nyquist a eu l'idée de proposer un critère de stabilité basé sur l'application du Th de Cauchy à la fonction  $F(p) = 1 + G(p)$

(\*) Rappelons que le système est stable ssi aucun pôle de  $H(p)$  n'est à partie réelle positive. Les pôles de la fonction de transfert en BF étant les zéros de  $F(p)$ .  
 → le système est stable ssi aucun zéro de  $F(p)$  ne se trouve à l'intérieur du contour de Nyquist.

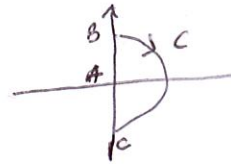
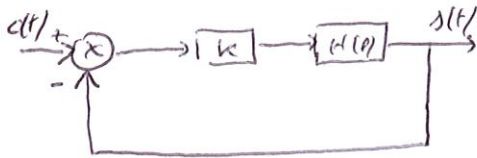
(\*) Il faut donc pour que le système soit stable  $m = 0$ ,  $m$  étant nbre de zéros de  $F(p)$  et donc le nbre de pôles de  $H(p)$

On peut également remarquer que les pôles de  $G(p)$  sont aussi ceux de  $F(p)$ .

Pour conséquent, le nbre  $n$  de pôles de  $F(p)$  se trouvant à l'intérieur du contour de Nyquist est égal au nbre de pôles instables de  $G(p)$  (à partie réelle positive)  $\circ$

Si on trace l'image par  $F = 1 + G$  du contour de Nyquist, on pourra donc diagnostiquer la stabilité du système en BF si le nbre de tours effectués par  $F(p)$  autour de l'origine est égal à  $-m$  (où  $m$  est le nbre de pôles de  $G(p)$  à partie réelle positive).

## Exercice



(11)

On prend  $k=1$

$$FTBO(p) = H(p) = \frac{1}{(p+2)(p+4)(p+10)}$$

(1) On en déduit que  $P \neq 0$  puisque le FTBO n'a aucun pôle dans le 1/2 plan droit.

(2) Il faut tracer dans le plan complexe l'image de C par  $H(p)$ .

La procédure est la suivante :

• sur la partie AB de C, on a  $p = j\omega$   $\omega \rightarrow 0^+$  à  $\omega \rightarrow +\infty$

$$\text{en A: } \lim_{p \rightarrow 0} H(p) = \frac{1}{80} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re} = \frac{1}{80} \\ \text{Im} = 0 \end{cases}$$

$$\text{en B: } \lim_{p \rightarrow +\infty} H(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{(p+2)(p+4)(p+10)} = \frac{1}{p^3} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re} = 0 \\ \text{Im} = 0 \end{cases}$$

Pour savoir comment on arrive à l'origine, il suffit d'évaluer la phase lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ . On peut écrire

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega^3} \Rightarrow \text{Arg}[H(j\omega)] = -\frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$$

• sur la partie CA: il suffit de remarquer que CA est la symétrique de AB par rapport à l'axe réel.

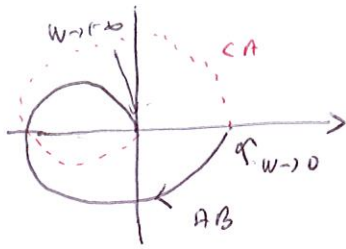
• sur la partie BC: on a  $p = R e^{j\theta}$  avec  $R \rightarrow +\infty$  et  $\theta = \left[ +\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right]$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} H(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{(p+2)(p+4)(p+10)} \simeq \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p^3} \simeq \frac{1}{R^3 e^{j3\theta}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Re} = 0 \\ \text{Im} = 0 \end{cases} \quad \forall \theta$$

Finalement, l'image du contour  $C$  par  $H(p)$  est:

(12)



lieu de Nyquist

(3) Pour conclure sur la stabilité, il faut que le lieu de Nyquist n'entoure pas le point critique  $(-1, 0)$  car on avait  $P=0$ .

→ On cherche la pulsation pour laquelle  $\text{Im}[H(j\omega)] = 0$  puis on l'injecte cette dernière dans  $\text{Re}[H(j\omega)]$ .

$$H(j\omega) = \frac{(2-j\omega)(4-j\omega)(10-j\omega)}{(4+\omega^2)(16+\omega^2)(100+\omega^2)} = \frac{80 - 68j\omega - 16\omega^2 + j\omega^3}{(4+\omega^2)(16+\omega^2)(100+\omega^2)}$$

$$\text{Im}[H(j\omega)] = 0 \Leftrightarrow -68\omega + \omega^3 = 0 \quad \omega(-68 + \omega^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = 0 \quad \text{et} \quad \omega = \sqrt{68} \text{ rad/s}$$

$\text{Im}[H(j\omega)] = 0 \Rightarrow$  la solution  $\omega = 0$  ne nous intéresse pas car dans ce cas  $\text{Re}[H(j\omega)]$  est positive

$\omega = -\sqrt{68} \text{ rad/s}$  est à rejeter car pas physique

$$\text{Re}[H(j\omega)]_{\omega=\sqrt{68}} = -9,92 \times 10^{-4} \gg -1$$

On en déduit que le lieu de Nyquist n'entoure pas le point  $(-1, 0)$  et le système est stable en BF.

## 2) Critères de Nyquist

Le critère de Nyquist est un critère graphique de stabilité en BF obtenue à partir du lieu de Nyquist du système en BO.

Il est une conséquence de théorème de Cauchy appliquée à la fonction de transfert d'un système asservi.

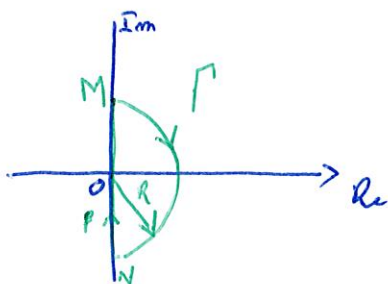
### a) Contour de Nyquist

On définit le contour de Nyquist par la courbe  $\Gamma$  définie par le demi-périmètre d'un cercle de rayon  $R$  et de centre  $O$  lorsque  $R \rightarrow \infty$  du côté des parties réelles.

Ce contour est formé de :

- (1) axe imaginaire  $p = j\omega$  pour  $\omega \in ]-\infty; +\infty[$
- (2) Un rayon  $R$  avec  $R \rightarrow +\infty$

On l'oriente arbitrairement dans le sens horaire. Cela signifie que l'on supposera dans l'application de théorème de Cauchy que  $p$  décrit le contour  $\Gamma$  dans le sens indiqué sur la figure.



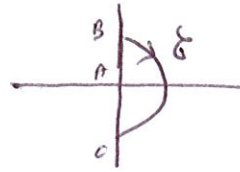
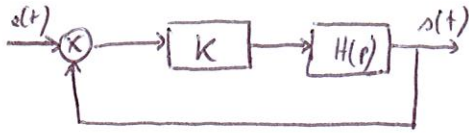
Il contient donc tout le demi-plan correspondant aux parties réelles positives.

### b) Application du théorème de Cauchy à l'étude de la stabilité.

**TR** Un système est stable en BF si l'image du contour de Nyquist par la fonction  $G(p)$  fait autour de  $C \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , dans le sens horaire, un nombre de tours égal à  $-m$  (où  $m$  est le nombre de pôles à partie réelle positive de la fonction de transfert en BO  $G(p)$ )

L'image du contour de Nyquist ne doit pas passer par le point critique  $C \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

## Exercice



On prend  $K=1$

$$FTBO(p) = H(p) = \frac{1}{(p+2)(p+4)(p+10)}$$

- (1) On en déduit que  $m=0$  puisque la FTBO n'a aucun pôle dans le 1/2 plan droit.
- (2) Il faut tracer dans le plan complexe l'image  $\mathcal{C}$  par  $H(p)$ .

La procédure est la suivante :

• sur la partie AB de  $\mathcal{C}$ , on a  $p=j\omega$   $\omega \rightarrow 0^+$  à  $\omega \rightarrow +\infty$

$$\text{en A: } \lim_{p \rightarrow 0^+} H(p) = \frac{1}{80} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re} = \frac{1}{80} \\ \text{Im} = 0 \end{cases}$$

$$\text{en B: } \lim_{p \rightarrow +\infty} H(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{(p+2)(p+4)(p+10)} = \frac{1}{p^3} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re} = 0 \\ \text{Im} = 0 \end{cases}$$

Pour savoir comment on arrive à l'origine, il suffit d'évaluer la phase lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ . On peut écrire

$$H(j\omega) = \frac{1}{p^3} = \frac{1}{(j\omega)^3} = -\frac{1}{j\omega^3}$$

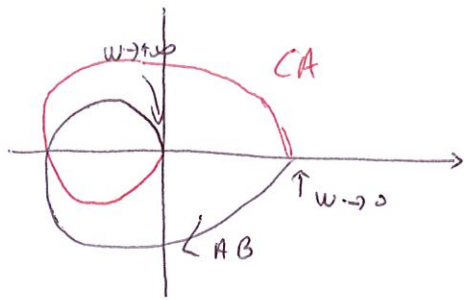
$$\text{Arg}[H(j\omega)] = -\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$$

- sur la partie CA : il suffit de remarquer que CA est la symétrique que de AB par rapport à l'axe réel.
- sur la partie BC, on a  $p = R e^{j\theta}$  avec  $R \rightarrow +\infty$  et  $\theta = [-\pi/2; \pi/2]$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} H(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{(p+2)(p+4)(p+10)} \approx \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p^3} \approx \frac{1}{R^3 e^{3j\theta}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Re} = 0 \\ \text{Im} = 0 \end{cases} \quad \forall \theta$$

Finalement, l'image du contour  $\mathcal{C}$  par  $H(p)$  est:



lieu de Nyquist

(3) Pour conclure sur la stabilité, il faut que le lieu de Nyquist n'entoure pas le point critique  $(-1, 0)$  car on avait  $P=0$ .

→ On cherche la pulsation pour laquelle  $\text{Im}[H(j\omega)] = 0$  puis on l'injecte dans  $\text{Re}[H(j\omega)]$

$$H(j\omega) = \frac{(2-j\omega)(4-j\omega)(10-j\omega)}{(4+\omega^2)(16+\omega^2)(100+\omega^2)} = \frac{80 - 68j\omega - 16\omega^2 + j\omega^3}{(4+\omega^2)(16+\omega^2)(100+\omega^2)}$$

$$\text{Im}[H(j\omega)] = 0 \Leftrightarrow -68\omega + \omega^3 = 0$$

$$\omega(-68 + \omega^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = 0 \text{ et } \omega = \pm \sqrt{68} \text{ rad/s}$$

$\text{Im}[H(j\omega)] = 0 \Rightarrow$  La solution  $\omega = 0$  ne nous intéresse pas car dans ce cas  $\text{Re}[H(j\omega)]$  est positive.

$\omega = -\sqrt{68} \text{ rad/s}$  est à rejeter car pas physique.

$$\text{Re}[H(j\omega)]_{\omega=\sqrt{68}} = -9,92 \times 10^{-4} \gg -1$$

On en déduit que le lieu de Nyquist n'entoure pas le point  $(-1, 0)$  et le système est stable en BF.

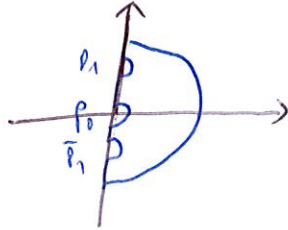


3) Cas particuliers où la FTBO a des pôles sur l'axe imaginaire.

(13)

Nous avons vu que des pôles à l'origine engendraient une instabilité tandis que des pôles sur l'axe imaginaire génèrent une sortie oscillante mais non divergente.

Par conséquent, Nyquist a choisi de déformer le contour  $C$  en rejetant les pôles particuliers à l'extérieur du contour :



On évite les singularités par des  $1/2$  cercles dont le rayon  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Evidemment, cela complique le tracé du lieu de Nyquist puisqu'il faut envisager des cas particuliers.

4) Cas particulier où la FTBO n'a que des pôles dans le  $1/2$  plan gauche.

Le FTBO a tous ses pôles dans le  $1/2$  plan gauche :

→ le système est stable en BO

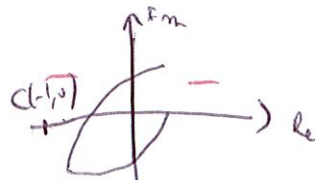
Dans ce cas, le critère de Nyquist nous indique le système en BF est stable si le lieu complet de Nyquist n'entoure pas le point critique ( $N=0$  et  $P=0$ )

Critère du Revers:

Pour un système de FT stable en BO, ie  $G(p)K(p)$  n'a que des pôles à partie réelle strictement négative, le BF sera stablessi :

Lorsqu'on parcourt la représentation harmonique de la BO, dans le plan de Nyquist, dans le sens des  $\omega$  croissants, on laisse le point critique  $(-1 \ 0)$  à sa gauche.

(EA):



## VI Marges de stabilité.

(14)

Nous voulons obtenir des systèmes ayant un certain degré de stabilité. Nous voulons un système stable et présentant des marges de sécurité appelées marges de stabilité.

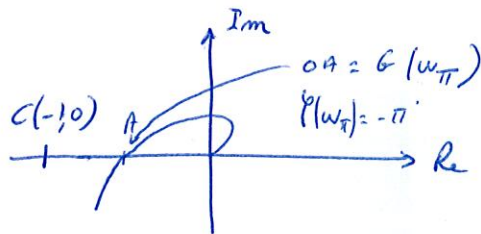
### 1) Marge de gain.

#### a) Déf.

Soit le FT en BO  $G(p)$ . Prenons l'hyp que cette FT en BO possède que des pôles à partie réelle négative.

→ On peut utiliser le critère du revers.

Le système est stable en BF si son lieu de Nyquist en BO laisse le point critique à sa gauche.



Le système sera plus sécurisé si la courbe passe loin du point c.

Plus CA est important, plus le système est stable.

On préfère évaluer la distance OA qui correspond aux coordonnées  $\begin{cases} |G(w)| = OA \\ \varphi(w) = -\pi \end{cases}$

Appelons  $w_\pi$  la pulsation pour laquelle se produit cette intersection.

$$\text{On a } OA = G(w_\pi)$$

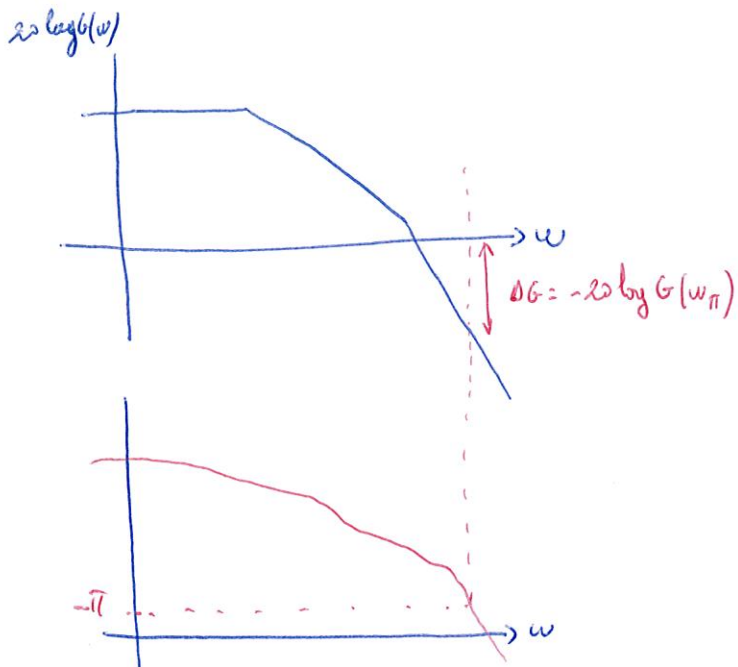
On définit alors la marge de gain par :

$$\Delta G = -20 \log OA = -20 \log G(w_\pi)$$

Cette définition permet de donner une marge de gain en décibels d'autant plus importante que le système est stable.

En considérant que l'on a toujours  $G(w_\pi) < 1$ , on a  $0 < \Delta G < +\infty$

→ sinon le point A se trouverait à gauche du point c et le système serait instable.



Rem: Il est possible de localiser la mesure de la marge de gain sur le diagramme de Bode.

Il suffit de repérer grâce au diagramme de phase la pulsation correspondant au déphasage  $-\pi$ .

Puis dans le diagramme de gain, à cette pulsation de mesure  $\Delta G$  (directement en décibels)

### b) Exemple

Considérons un système de FT en BO  $G(p)$  placé dans une boucle de régulation à retour unitaire  $G(p) = \frac{5}{\left(\frac{p}{100} + 1\right)^3}$

Le calcul de la marge de gain consiste à chercher:

(1) la valeur de  $w_\pi$

(2) calculer  $\Delta G = -20 \log |G(w_\pi)|$

(1)  $w_\pi$  est tel que  $\varphi(w_\pi) = -\pi$

$$\text{On a } G(jw) = \frac{5}{\left(j \frac{w}{100} + 1\right)^3}$$

$$\text{donc } \varphi(w) = \arg[G(jw)] = 0 - 3 \arctan \frac{w}{100}$$

$$\varphi(w_\pi) = -\pi \Leftrightarrow -3 \arctan \frac{w_\pi}{100} = -\pi$$

$$\Rightarrow w_\pi = 100 \tan \frac{\pi}{3} = 100\sqrt{3}$$

(4) On a alors :  $\Delta G = -20 \log |G(100\sqrt{3})|$

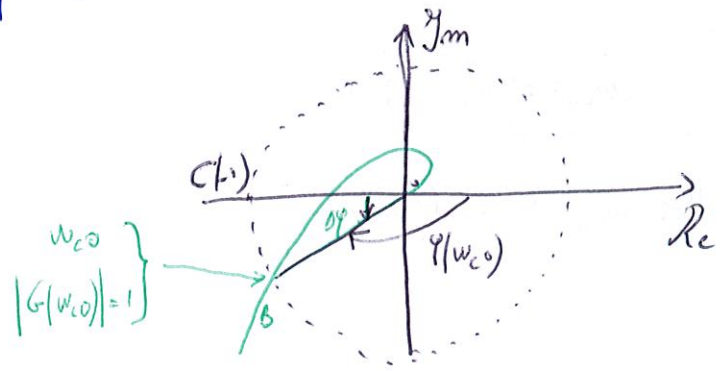
$$= -20 \log \frac{5}{\left(\sqrt{\frac{w_\pi^2}{10^4} + 1}\right)^3} = -20 \log \frac{5}{(\sqrt{3+1})^3}$$

$$= -20 \log \frac{5}{8} = 4 \text{ dB}$$

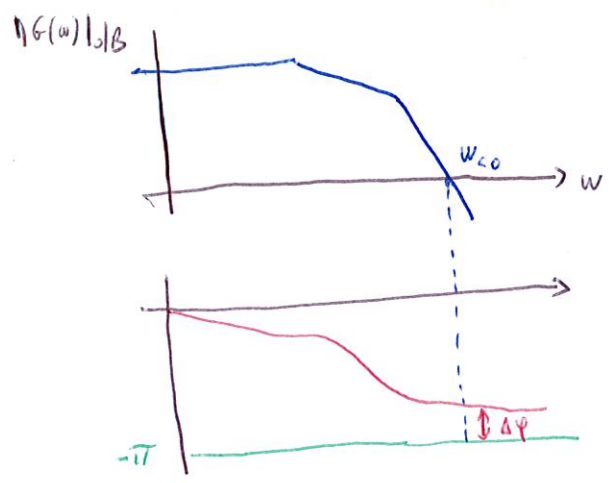
## 2) Marge de phase

### a) Définition.

La marge de phase permet de chiffrer "l'éloignement angulaire" entre le lieu de Nyquist et le point critique C.



En évaluant l'éloignement de ce point B par rapport au point C, nous pouvons à nouveau définir une marge de stabilité. Cette marge (angle  $\widehat{C\hat{O}B}$ ) est appelée marge de phase et notée  $\Delta\varphi$ . Comme  $\varphi(w_{c0}) - \Delta\varphi = -\pi$  on a  $\Delta\varphi = \pi + \varphi(w_{c0})$



### b) Exemple.

Soit le système de  $1^{er}$  de transfert en BO  $G(p) = \frac{5}{(\frac{p}{\omega_0} + 1)^3}$  placé dans une boucle de régulation à retour unitaire.

Le calcul de la marge de phase consiste à chercher :

- (1) la valeur  $w_{c0}$  et (2) calculer  $\Delta\varphi = \pi + \varphi(w_{c0})$