Chap : Réponses harmoniques

(1) Introduction

Les performances d'un système sont jugées plutôt sur sa réponse temporelle :
(1) temps de réponse, (2) dépassement....

Cependant, on a montré la difficulté d'obtenir de façon analytique les propriétés temporelles d'un système dès lors qu'il était du 2^{nd} ordre.

Le problème est encore plus compliqué pour des systèmes d'ordre plus élevé.

→ Il existe des méthodes graphiques liées au domaine fréquentiel pour l'analyse des systèmes linéaires.

On pourra déduire les caractéristiques temporelles d'un système à partir d'une analyse de sa réponse harmonique.

(2) Définitions.

La réponse harmonique (ou fréquentielle) d'un système est la réponse de celui-ci à une entrée sinusoïdale.

Si on prend $e(t) = Ae^{j\omega t}$ d'amplitude A et de pulsation ω et que l'on injecte ce signal $e(t)$ à l'entrée d'un **SLTI**, on obtient pour la sortie :

$$s(t) = \int_0^t h(\theta) \times A\, e^{j\omega(t-\theta)}\, d\theta = A e^{j\omega t} \int_0^t h(\theta)\, e^{-j\omega\theta}\, d\theta$$

$$\text{si } t \to +\infty \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \int_0^t h(\theta)\, e^{-j\omega\theta}\, d\theta = H(p)\Big|_{p=j\omega}$$

donc $\boxed{s(t) \longrightarrow A\, e^{j\omega t} \cdot H(j\omega)}$

On peut écrire la fonction complexe $H(j\omega)$ sous une forme faisant apparaître module et argument, $H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j\, Arg[H(j\omega)]}$

Lorsque le système atteint son régime permanent ($t \to +\infty$), on a :

$s(t) = A\, |H(j\omega)| . e^{j[\omega t + \theta]}$ avec $\theta = Arg[H(j\omega)]$

- La sortie d'un système linéaire excité par un signal sinusoïdal est sinusoïdale de même pulsation que l'entrée.
- L'amplitude est modifiée par le gain du système à la pulsation ω, $|H(j\omega)|$
  Elle est déphasée de $Arg[H(j\omega)]$ par rapport à l'entrée.

L'analyse harmonique passe donc par la connaissance de $|H(j\omega)|$ et $Arg[H(j\omega)]$ pour tout ω applicable au système étudié.

L'analyse harmonique d'un système consiste à injecter en entrée un signal sinusoïdale d'amplitude A et de pulsation ω. On relève alors l'amplitude du signal de sortie (après stabilisation) et son déphasage par rapport à l'entrée.

On répète cette opération pour différents ω sur une plage de pulsation représentative du système. On obtient une collection de couples $[|H(j\omega)| ; Arg[H(j\omega)]]$ qui représentent la réponse fréquentielle du système.

③ Les représentations graphiques usuelles.

$H(j\omega)$ est une fonction de la variable complexe, on a plusieurs représentations :

(1) Plan de Bode :

Conserver l'info de fréquence : on devra alors tracer sur des graphiques séparés module et phase en fonction de la fréquence (ou pulsation)

(2) Plan de Black - Nichols :

Tracer le module en fonction de la phase dans un plan X/Y. La courbe est paramétrée en ω mais la pulsation n'intervient plus directement.

(3) Plan de Nyquist :

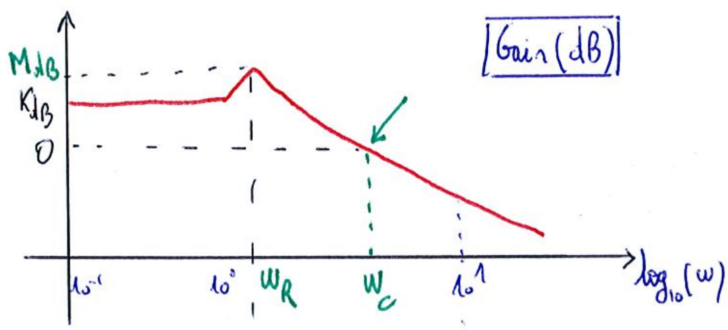
$$H(j\omega) = Re(\omega) + j\,Im(\omega)$$

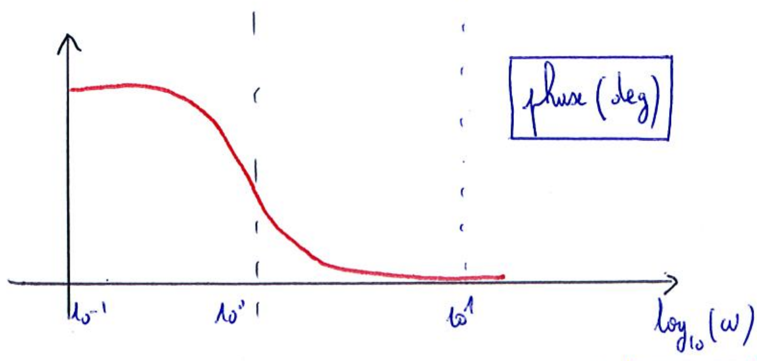
On trace dans un plan X/Y la partie imaginaire en fonction de la partie réelle. La courbe est paramétrée en ω.

Le choix de ces représentations dépend de l'utilisation que l'on veut faire de la réponse fréquentielle et/ou parfois du type de système étudié.

④ Propriétés fréquentielles

On va définir les propriétés essentielles de $H(j\omega)$ à partir du diagramme de Bode.





(1) Gain en décibels (dB)

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10}\left[|H(j\omega)|\right]$$

Par ex : Si pour une pulsation donnée, on trouve

$|H(j\omega)| = 2 \Rightarrow |H(j\omega)|_{dB} = 6\,dB$

(2) Octave : intervalle dont les deux bornes sont distantes d'un rapport 2 : $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$

(3) décade : ———————————— 10 : $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 10$

(4) Gain statique K

Gain qd $\omega \to 0$. Celui-ci doit être fini. Dans le cas contraire, on parlera de la pente en basse fréquence.

(5) Résonance (M)

Gain max pour une pulsation particulière ω_R. En général supérieur à K.

(6) Pulsation de résonance (ω_R) à laquelle se produit la résonance.

(7) Bande passante (BP)

Pulsation à laquelle l'amplitude devient $\frac{\sqrt{2}}{2}K$ ou encore pulsation à laquelle l'amplitude devient $K_{dB} - 3_{dB}$

(8) Pulsation ou fréquence de coupure (ω_c)

pulsation à laquelle l'amplitude devient égale à 1 ou encore pulsation à laquelle ———————— à 0 dB

(9) pente à l'infini (p)

Elle est significative du comportement haute fréquence du système.

p sera exprimée soit en multiple de 20 dB/décade soit par un entier relatif.

Si la pente est de $k \times 20$ dB/décade on pourra abréger en disant que l'on a une pente k.

ex $p = -40$ dB/décade on pourra dire que la pente à l'infini est de -2

p quantifie le gain (en dB) gagné ou perdu en 1 décade de fréquence (suivant le signe de k)

5 Systèmes du 1er ordre

a) lieu de Bode

$$H(p) = \frac{K}{1+p\tau}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega\tau}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \quad \text{et} \quad |H(j\omega)|_{dB} = 20\log\left[|H(j\omega)|\right] \\ Arg\left[H(j\omega)\right] = -\arctan(\omega\tau) \end{cases}$$

On peut réaliser un tracé point par point en faisant varier ω mais il est préférable d'avoir une idée de l'allure des 2 courbes.

On trace alors un diagramme asymptotique dans le plan de Bode.

On définit la pulsation de brisure $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\tau}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \\ Arg\left[H(j\omega)\right] = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) \end{cases}$$

Le tracé asymptotique se fait de la manière suivante :

- En basse fréquence : $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \simeq K \\ Arg[H(j\omega)] \simeq 0 \end{cases} \Rightarrow$ indépendance en ω

- En haute fréquence : $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \simeq \dfrac{K\omega_0}{\omega} \\ Arg[H(j\omega)] \simeq -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$ dépendance en ω

Etudions le comportement en HF du gain :

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{K\omega_0}{\omega}\right) = 20\log_{10} K\omega_0 - 20\log_{10}(\omega)$$

Le gain - exprimé en dB - est une droite de type $y = ax + b$

avec $\begin{cases} a = -20 \\ x = \log_{10}(\omega) \\ b = 20\log_{10}(K\omega_0) \end{cases}$

Cherchons la pente HF :

Prenons $\omega_1 = 1$ rad/s $\quad \omega_2 = 10$ rad/s

$$\begin{cases} y_1 = |H(j\omega_1)|_{dB} = 20\log(K\omega_0) - 20\log_{10}(1) \\ \qquad = 20\log_{10}(K\omega_0) = b \\ y_2 = |H(j\omega_2)|_{dB} = 20\log_{10}(K\omega_0) - 20\log_{10}(10) \\ \qquad = 20\log_{10}(K\omega_0) - 20 \\ \qquad = b - 20 \end{cases}$$

En 1 décade, on a perdu 20 dB en gain.

$p = -20$ dB/décade ou encore $p = -1$

En utilisant la continuité pour passer des BF au HF. On a :

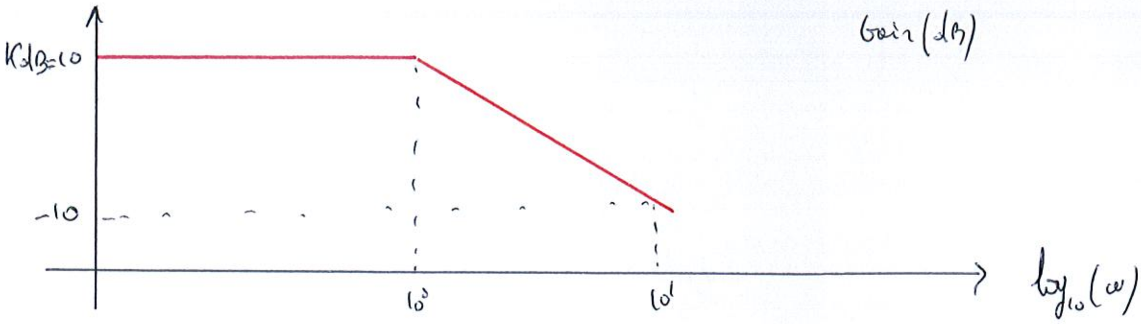
$$20\log_{10}\left(\frac{K\omega_0}{\omega}\right) = 20\log_{10}(K)$$

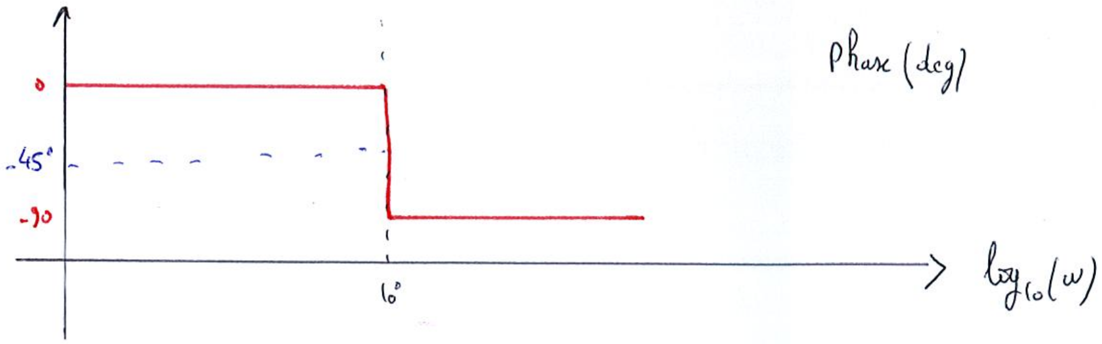
$\Rightarrow$ le changement d'asymptote se fait à $\underline{\omega = \omega_0}$

Pour le tracé, on suppose $K_{dB} = 10$ dB et $\omega_0 = 1$ rad/s

on peut compléter ces diagrammes en utilisant les données en ω_0 :

$$\begin{cases} |H(j\omega_0)| = \dfrac{K}{\sqrt{2}} \Rightarrow |H(j\omega_0)|_{dB} = K_{dB} - 3\,dB \\ \mathrm{Arg}[H(j\omega)] = -45° \end{cases}$$





Un lieu de Bode se trace :

(1) exprimer la FT en fct° de ω

(2) calculer le module de $H(j\omega)$ fct de ω (en dB)

(3) ——— la phase $\mathrm{Arg}[H(j\omega)]$ ——— ω (en degré)

(4) papier semi-log, porter le module en ordonnées (échelle linéaire) en fonction de la pulsation (en abscisse échelle log). Puis répéter l'opération pour la phase.

Propriétés fréquentielles de $\frac{K}{1+\tau p}$	
Gain statique	K
Résonance	0
Pulsation ω_R	N.D
Pulsation de coupure ω_c	$\frac{\sqrt{K^2-1}}{\tau}$ (rd/s)
BP (bande passante)	$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$
pente HF p	-1
Phase en BF	0
Phase en HF	-90