Montigny Eric

Exercice type I, sur *le produit de convolution*

L'énoncé de l'exercice :
Calculer f*g avec :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } -1\le x<3\\ 0 & \textit{ailleurs}\end{cases} \quad \text{et} \quad g(x)=\begin{cases}x/2 & \text{si } 0\le x\le 2\\ 0 & \textit{ailleurs}\end{cases}$$

a) La première étape :

On écrit la définition du produit de convolution, à savoir :

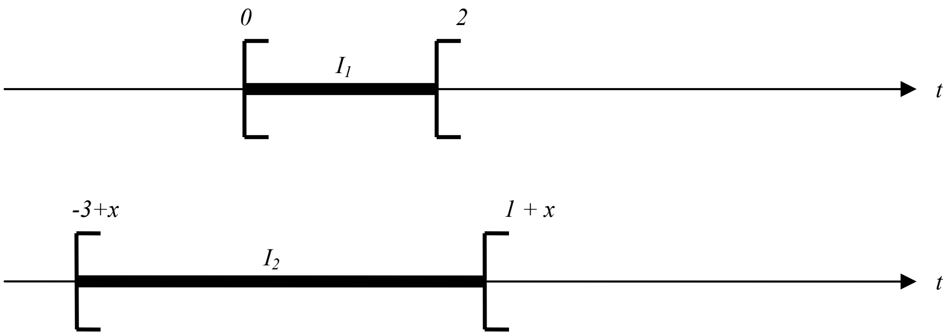
$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t).f(x-t)$$

b) La deuxième étape :

On s'intéresse aux différents intervalles :

- $g(t)=\frac{t}{2}$ si $0\le t\le 2$ donc $t\in[0;2]=I_1$
- $f(x-t)=1$ si $-1\le x-t\le 3 \Leftrightarrow -1-x\le -t\le 3-x \Leftrightarrow x+1\ge t\ge -3+x \Leftrightarrow -3+x\le t\le x+1$ donc $t\in[-3+x;1+x]=I_2$

Ensuite, pour mieux cerner la chose, mieux vaut user d'un petit croquis :

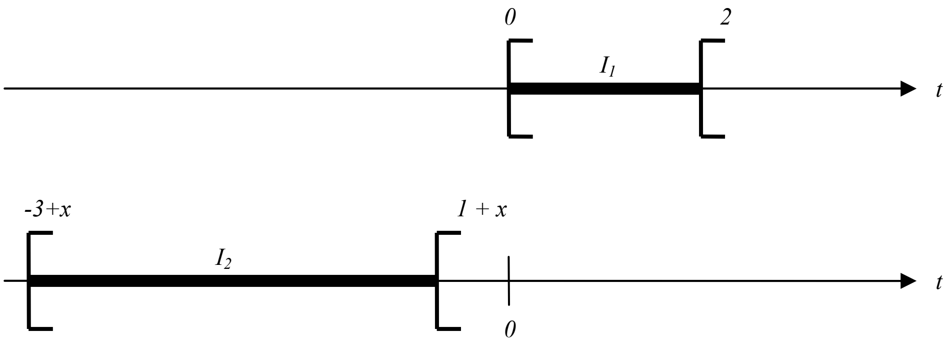


c) On applique la définition du produit de convolution :

Définition du produit de convolution : $(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t).f(x-t)=\int_{I_1\cap I_2} 1.\frac{t}{2}.dt$

Hors, résoudre un tel calcul s'avère assez complexe. Usons de stratégie, et découpons en plusieurs cas, et procédons aux intégrations, au cas par cas :

Cas 1 :

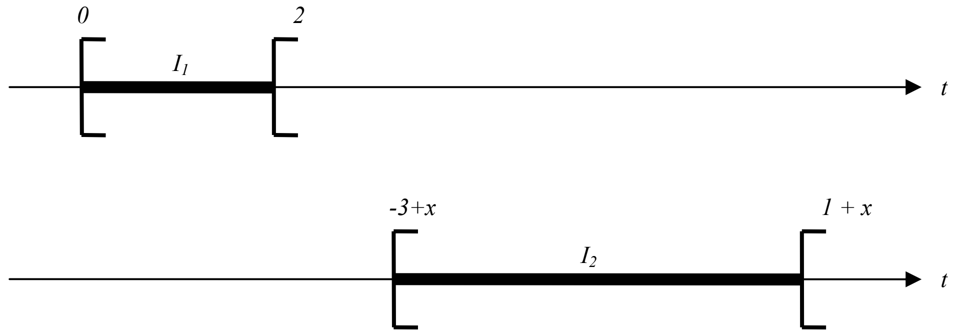


On remarque que les deux intervalles ne se recouvrent pas, donc quand on va multiplier la fonction f par la fonction g, on va trouver zéro.

Dans un langage plus mathématique, cela serait :

$$\text{Si } 1+x<0, \text{ alors } I_1 \cap I_2 = \varnothing, \text{ donc } (f*g)(x)=0$$

Cas 2 :

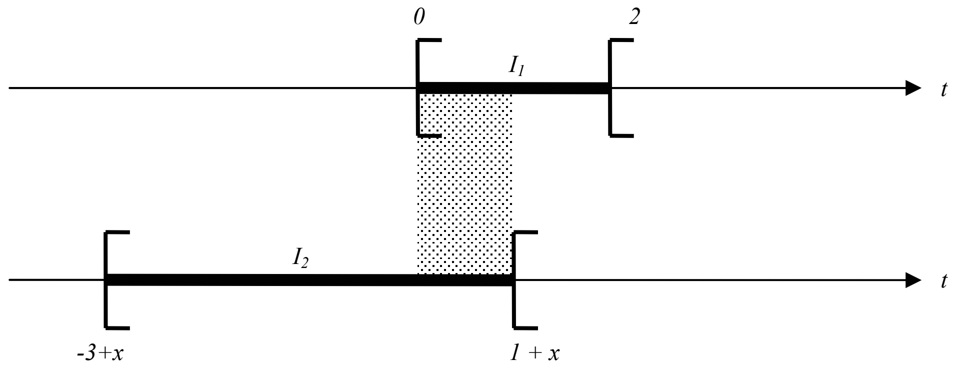


Il n'y a pas non plus de recouvrement dans cette situation. Donc :

$$\text{Si } -3+x>2, \text{ alors } I_1 \cap I_2 = \varnothing, \text{ donc } (f*g)(x)=0$$

Maintenant que nous avons vu les deux cas les plus défavorables (et aussi les plus simples…), passons à la suite.

Cas 3 :



Cette fois-ci il y a recouvrement, sur une partie des deux intervalles.

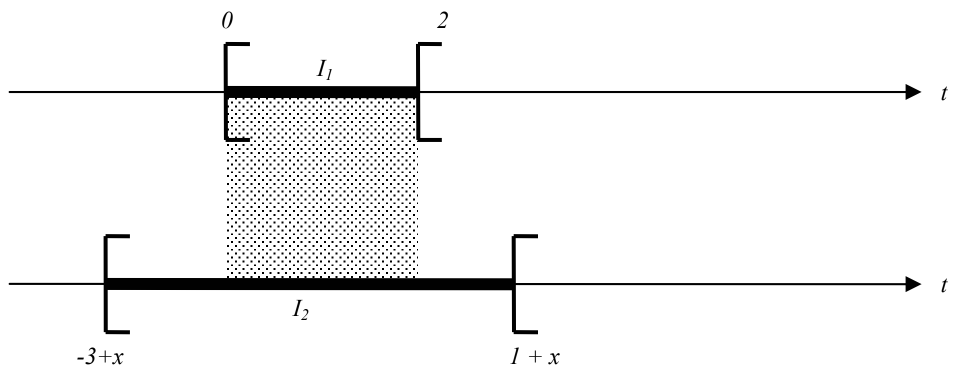
$$\text{Si } 0<1+x<2, \text{ alors } I_1 \cap I_2 = [0;1+x]$$

On peut donc déterminer la valeur du produit de convolution, à partir de sa définition élémentaire :

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t).f(x-t)=\int_{I_1\cap I_2} 1.\frac{t}{2}.dt=\int_0^{1+x}\frac{t}{2}.dt=\frac{1}{2}\int_0^{1+x} t.dt=\frac{1}{2}.\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{1+x}=\frac{1}{4}.\left[t^2\right]_0^{1+x}$$

$$\Rightarrow (f*g)(x)=\frac{1}{4}.\left[t^2\right]_0^{1+x}=\frac{1}{4}\left\{(1+x)^2-0\right\}=\frac{(1+x)^2}{4}$$

Cas 4 :



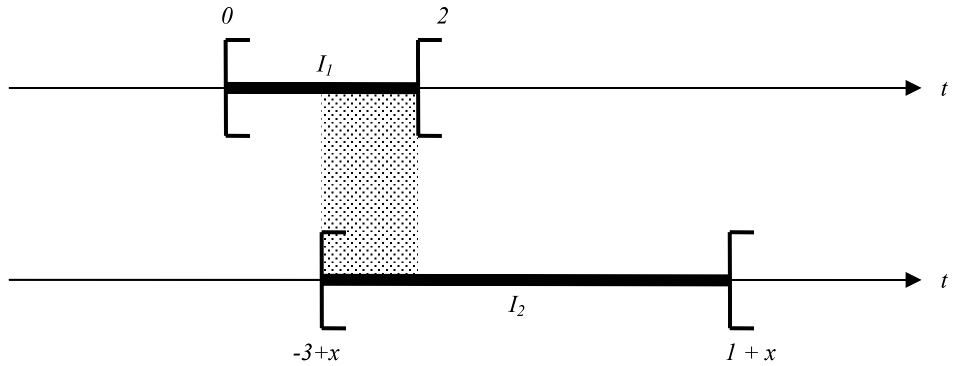
Une fois encore, il y a bien recouvrement, donc nous allons procéder comme au cas précédent.

$$\text{Si } -3+x<0 \text{ et } 1+x>2, \text{ alors } I_1 \cap I_2 = [0;2]$$

Déterminons la valeur du produit de convolution :

$$(f*g)(x)=\frac{1}{4}.\left[t^2\right]_0^{2}=\frac{1}{4}\left\{2^2-0^2\right\}=\frac{4-0}{4}=\frac{4}{4}=1$$

Cas 5 :



Il y a toujours et encore recouvrement :

$$\text{Si} -3+x>0, \text{alors } I_1 \cap I_2 = [-3+x;2]$$

Déterminons la valeur du produit de convolution :

$$(f*g)(x) = \frac{1}{4}.[t^2]_{-3+x}^{2} = \frac{1}{4}\{2^2-(-3+x)^2\} = \frac{1}{4}.\{4-(x-3)^2\} = \frac{1}{4}.\{4-\{x^2+9-6x\}\} = \frac{1}{4}\{4-x^2-9+6x\} = \frac{-x^2+6x-5}{4}$$

d) On résume tout !

Maintenant que nous avons déterminé les diverses valeurs du produit de convolution, sur les divers intervalles, il est envisageable de tracer (par morceaux), la courbe représentative :