Examen d'introduction aux communications numériques

Romain Tajan et Iryna Andriyanova

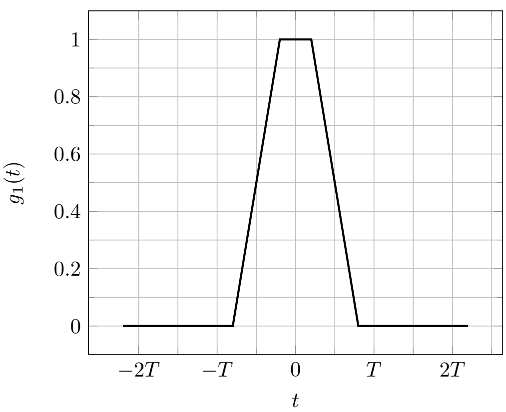
8 juin 2012

Pré-requis

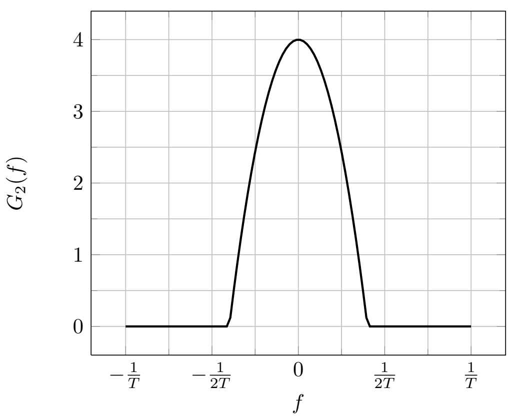
- Durée de l'épreuve : **3h**,
- **Aucun document ni appareil électronique** n'est autorisé pendant l'épreuve,
- L'énoncé comporte 5 feuilles,
  - de la feuille 1 à la feuille 3 vous trouverez les **énoncés** des 3 différents exercices,
  - sur la feuille 4 vous trouverez un **formulaire**
  - sur la feuille 5, vous trouverez une **annexe** afin de répondre aux questions 2 et 10.d de l'exercice 3.
- Bonne chance à tous !

Exercice 1 : Filtre de Nyquist et IES (4 points)

Question 1: Le filtre ayant pour réponse impulsionnelle $g_1(t)$ donnée dans la figure ci-dessous vérifie-t-il un des critères de Nyquist ($g_1(t)$ est nul en dehors de ce qui est représenté) ? Justifiez votre réponse.



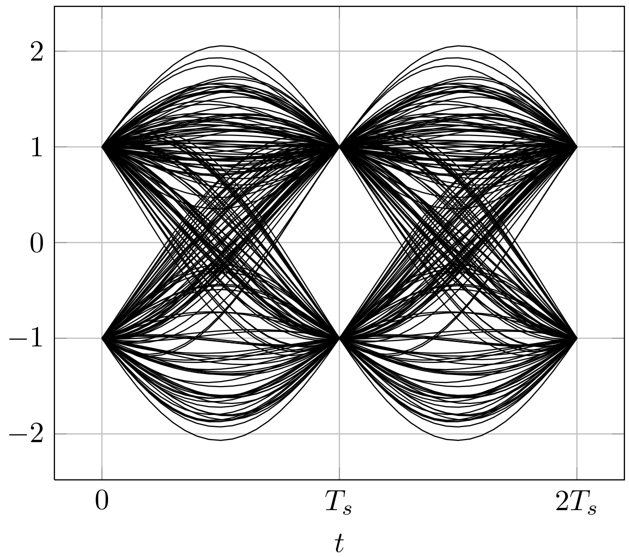
Question 2: Le filtre ayant pour réponse en fréquence $G_2(f)$ donnée dans la figure ci-dessous vérifie-t-il un des critères de Nyquist ($G_2(f)$ est nul en dehors de ce qui est représenté) ? Justifiez votre réponse.



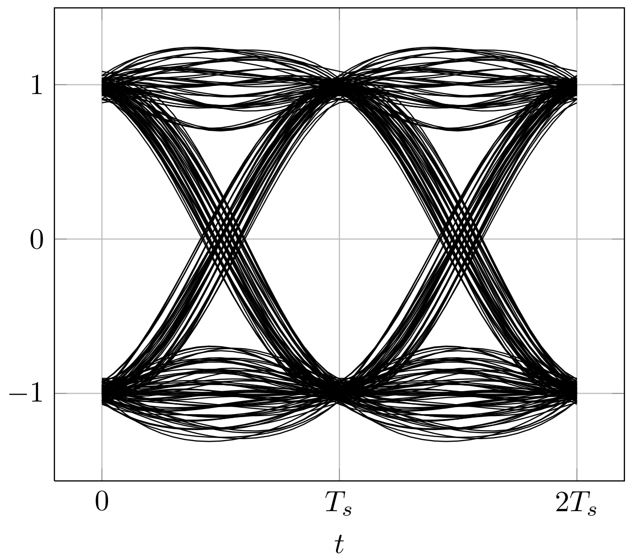
La suite au verso

Question 3: Qu'est-ce que l'Interférence entre symbole (IES) ?

Question 4: On considère le diagramme de l'œil ci-dessous. Fait-il apparaître de l'IES ? Justifiez votre réponse.

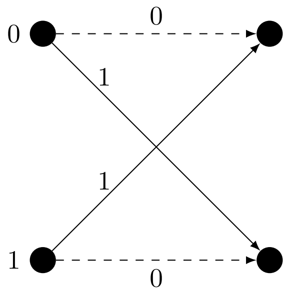


Question 5: On considère le diagramme de l'œil ci-dessous. Fait-il apparaître de l'IES ? Justifiez votre réponse.



Exercice 2 : Codage de canal (4 Points)

Dans cet exercice, on considère un code dont le treillis a la section suivante :



Sur cette représentation du treillis, les ***flèches en pointillés*** représentent des bits 0 alors que *les flèches pleines* représentent des bits à 1.

Question 1: Le treillis complet doit commencer dans l'état 0 et finir dans l'état 0. Dessinez le treillis complet pour des mots de codes de longueur 4 bits.

Question 2: À partir du treillis de la question précédente, trouvez le(s) mot(s) de code(s) commençant par la séquence 101.

Question 3: Après encodage, le mot de code c est envoyé dans le canal. En entrée du décodeur de canal, on reçoit la séquence $r = 1000$. Utilisez le treillis afin de trouver le(s) mot(s) de code(s) possibles pour c.

Question 4: Combien d'erreurs ce code peut il détecter ? Justifiez votre réponse.

Question 5: Combien d'erreurs ce code peut il corriger ? Justifiez votre réponse.

Question 6: Ce code est en fait un code que vous connaissez. Pouvez vous le reconnaître ?

Question 7: Quel est le rendement de ce code ?

Exercice 3 : Une modulation rectangle. (12 Points)

On considère la constellation suivante comprenant M ***symboles*** disposés sur un ***rectangle*** possédant A ***lignes*** et B ***colonnes.*** Afin de simplifier l'étude dans un premier temps, on considère la modulation telle que $A = 4$ et $B = 8$ représentée sur la figure ci-dessous.

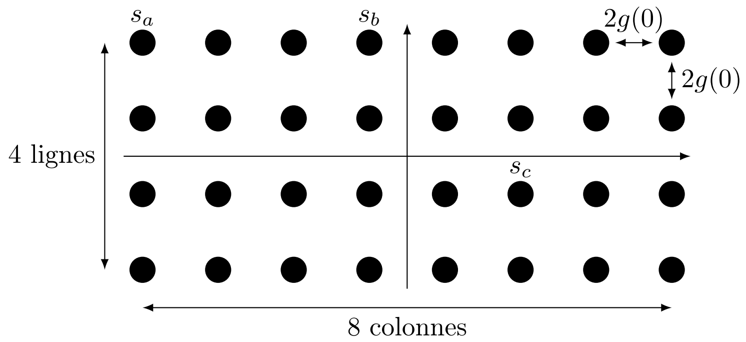


FIGURE 1 –

On considère dans *tout cet exercice* que
- les symboles sont ***équiprobables*** et ***indépendants***,
- la distance entre deux plus proches voisins est $2g(0)$
- le canal est à bruit additif blanc gaussien (AWGN) complexe,
- les échantillons du bruit suivent la loi $\mathcal{CN}(0, \sigma_b)$

Question 1: Quel est le type de la modulation proposée ?

Question 2: Dessinez les régions de décisions pour la modulation obtenue sur l'***Annexe 1***. Justifiez votre dessin.

Question 3: Exprimez la probabilité d'erreur symbole $P_s(e)$ en fonction des probabilités $P_s(e|s_i)$ et des probabilités d'émission de chaque symbole, $P(s_i)$. (On rappelle que les symboles sont équiprobables)

Question 4:
a) Combien de voisins possède s_a ?

b) Combien de symboles de la modulation ont ce nombre de voisins ?

c) Mêmes questions pour s_b et s_c.

Question 5: On considère que si deux symboles s_i et s_j ont le même nombre de voisins alors ils vérifient la relation suivante : $P_s(e|s_i) = P_s(e|s_j)$. Utiliser cette information pour écrire $P_s(e)$ en fonction de $P_s(e|s_a)$, $P_s(e|s_b)$ et $P_s(e|s_c)$.

Question 6:
a) Utilisez la technique de la borne de l'union (considérez seulement les voisins les plus proches) pour donner une majoration de la probabilité $P(e|s_a)$ en fonction de son nombre de voisins, de $g(0)$ et de σ_b.

b) Même question pour $P(e|s_b)$ et $P(e|s_c)$.

Question 7: En déduire $P_s(e)$ en fonction de $g(0)$ et σ_b.

La suite au verso

Question 8: Calculez $P_s(e)$ en fonction du rapport $\frac{E_b}{N_0}$. On considère que l'on a la relation suivante :

$$\frac{g(0)^2}{\sigma_b^2} = \frac{5}{26}\frac{E_b}{N_0}. \tag{1}$$

Question 9: Donnez les bornes sur $P_b(e)$ à partir de $P_s(e)$. En déduire $P_{b,min}(e)$ en fonction du rapport $\frac{E_b}{N_0}$.

Question 10: On considère maintenant le cas où **A et B sont quelconques**.
a) En vous inspirant des questions précédentes, calculez $P_s(e)$ et $P_{b,min}(e)$ en fonction de A, B, $M = A \times B$ et du rapport $\frac{E_b}{N_0}$. On aura cette fois la relation suivante :

$$\frac{g(0)^2}{\sigma_b^2} = \frac{3\log_2(M)}{A^2 + B^2 - 2}\frac{E_b}{N_0}. \tag{2}$$

b) Que vaut $P_s(e)$ si $A = 1$ et $B = M$. Interprétez ce résultat.

c) Que vaut $P_s(e)$ si $A = B = \sqrt{M}$. Interprétez ce résultat.

d) Sur l'***Annexe 2***, dans le cas où $A = 2$ et $B = 4$, étiquetez la modulation afin d'avoir $P_{b,min}(e)$. Comment s'appelle cet étiquetage ?

Formulaire

Formulaire su la chaîne de communication

Considérons la chaîne de communication suivante

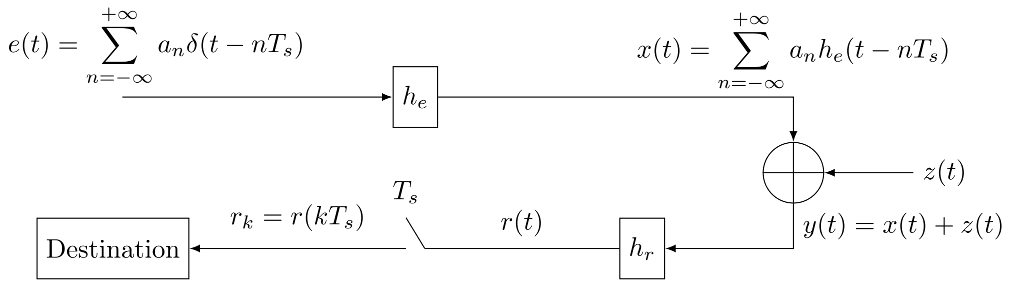


Figure 2 – Schéma du canal échantillonné en l'absence d'IES

Sur la figure 2 on a la relation suivante pour $r(t)$:

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (h_e \otimes h_r)(t - nT_s) + (h_r \otimes z)(t). \tag{3}$$

En utilisant les notations suivantes : $g(t) = (h_e \otimes h_r)(t)$ et $z'(t) = (h_r \otimes z)(t)$, l'écriture de $r(t)$ devient :

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT_s) + z'(t)$$

Formulaire sur le codage

Soit un code $\mathcal{C}$, possédant en entrée K bits d'information et en sortie N bits. Le rendement du code $\mathcal{C}$ est donné par la formule suivante : $r = \frac{K}{N}$.

Formulaire sur les probabilités d'erreur symbole pour des modulations classiques

Pour une $\boldsymbol{M}$**-*PAM*** : $P_S(e) = 2\frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$

Pour une $\boldsymbol{M}$**-*QAM*** : $P_S(e) = 4\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$

Formulaire de généralités sur les Probabilités

Loi Normale Circulaire

Soit Z une variable aléatoire complexe telle que $Z = Z_I + iZ_Q$ avec Z_I et Z_Q deux variables aléatoires réelles telles que

- Z_I suit la loi normale suivante $\mathcal{N}(m_I, \sigma/\sqrt{2})$,
- Z_Q suit la loi normale suivante $\mathcal{N}(m_Q, \sigma/\sqrt{2})$,
- les variables aléatoires Z_I et Z_I sont indépendantes.

On dit alors que Z suit une loi Normale Circulaire notée $\mathcal{CN}$ de moyenne $z_0 = m_I + im_Q$ et de variance σ^2 et on écrit cette loi $\mathcal{CN}(z_0, \sigma)$.

Fonction Q

Soit une variable aléatoire complexe Z suivant la loi $\mathcal{CN}(z_0, \sigma)$. Soit une droite $\mathcal{D}$ à une distance d de z_0 découpant le plan complexe en deux parties $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$ (une configuration possible est donnée en figure 3).

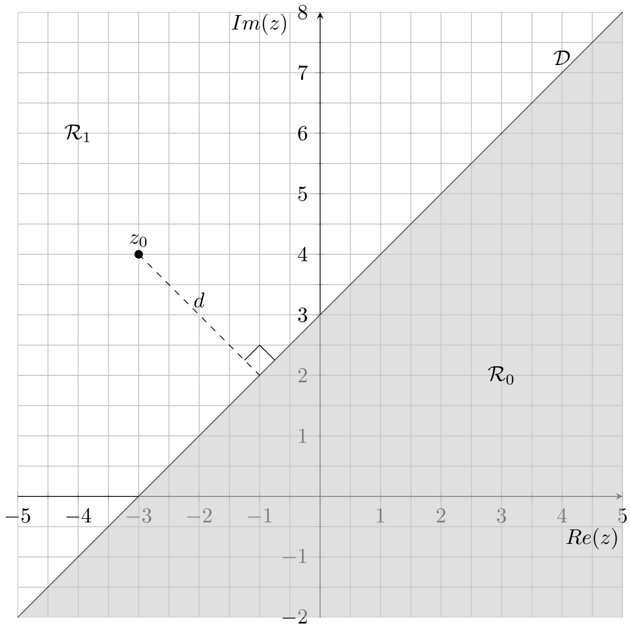


Figure 3 –

La probabilité que la variable aléatoire Z soit dans $\mathcal{R}_0$ est calculée grâce à la fonction Q de la façon suivante :

$$\mathbb{P}\left(Z \in \mathcal{R}_0\right) = Q(\frac{\sqrt{2}d}{\sigma}). \tag{4}$$

Borne de l'union

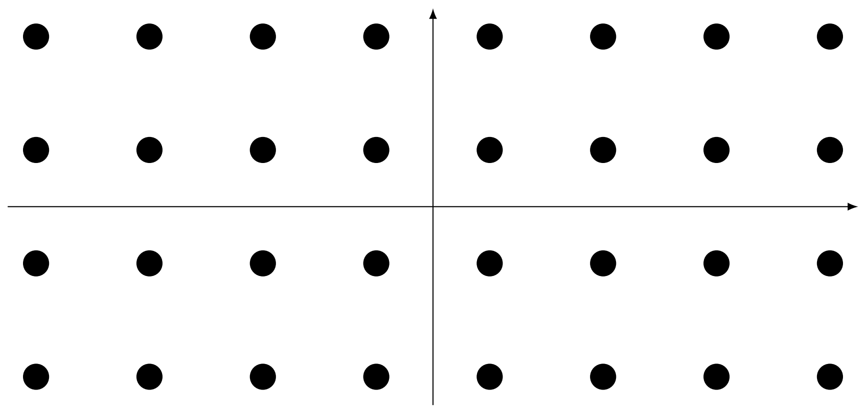
Considérons une modulation $\mathcal{M}$. Soit un symbole s_i de la modulation. La probabilité d'erreur symbole $P_s(e|s_i)$ peut être majorée par la probabilité suivante

$$P_s(e|s_i) = \sum_{j:j\neq i} P_s(e|s_i, \{s_i, s_j\}), \tag{5}$$

où la notation $P_s(e|s_i, \{s_i, s_j\})$ signifie que l'on considère le cas binaire entre les symboles s_i et s_j.

Annexes

<u>Annexe 1</u> : Réponse à la question 2 de l'exercice 3.



<u>Annexe 2</u> : Réponse à la question 10.d de l'exercice 3.